Théorème de Hadamard-Lévy

<u>Théorème :</u> Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$;

(ii) f est propre et df_x est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Démonstration :</u>

• <u>(i) => (ii) :</u> On suppose que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
Alors f est propre, car f^{-1} est continue, et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{id} = df^{-1}_{f(x)} \circ df_x$, donc df_x est inversible.

• <u>(ii) => (i) :</u> On suppose que f est propre et que df_x est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
On va montrer que f est bijective. Quitte à considérer $x \longmapsto f(x) - a$, $a \in \mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que $S := f^{-1}(\{0\})$ est de cardinal 1.

On pose $X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & -df_x^{-1}(f(x)) \end{array}$, et on note $\varphi^t(x)$ le flot de X, qui est défini, à x fixé, sur un intervalle $[0, T^*[$ par Cauchy-Lipschitz.

- <u>Etape 1 :</u> Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $g : \begin{array}{ccc} [0, T^*[& \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f \circ \varphi^t(x) \end{array}$. Alors g est $\mathcal{C}^1$,

et, pour tout $t \in [0, T^*[$, on a
$$\begin{aligned} g'(t) &= df_{\varphi^t(x)} \circ d\varphi_{(t,x)}(1, 0) \\ &= df_{\varphi^t(x)}\left(-df_{\varphi^t(x)}^{-1}(f \circ \varphi_t(x))\right) \\ &= -g(t) \end{aligned}$$

donc $g(t) = e^{-t} f(x)$, ce qui donne $\varphi^t(x) \in f^{-1}(\overline{B}(0, \|f(x)\|))$
↳ compact, car f est propre

Par lemme de sortie de tout compact, on a donc $T^* = +\infty$.

- Etape 2 : On va montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in S$ tel que $\varphi^t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$.

On commence par remarquer que la suite $(\varphi^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est dans le compact $f^{-1}(\bar{B}(0, \|f(x)\|))$.

On fixe alors une extraction n_k et $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi^{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$.

On a $f(y) = \lim\limits_{k \to +\infty} f \circ \varphi^{n_k}(x) = \lim\limits_{k \to +\infty} e^{-n_k} f(x) = 0$, donc $y \in S$. Par inversion locale,

on fixe un voisinage $\mathcal{U}$ de y tels que $f_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme.
$\mathcal{V}$ de 0

Quitte à réduire $\mathcal{U}$, on suppose que $\mathcal{V}$ est de la forme $B(0, \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$.

<u>Lemme</u> : Soit $t_0 > 0$ tel que $\varphi^{t_0}(x) \in \mathcal{U}$. Alors pour tout $t \geq t_0$, $\varphi^t(x) \in \mathcal{U}$.

→ On pose $g : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t} f(x))$, qui est bien défini car $e^{-t} f(x) \in \mathcal{V}$ pour

tout $t \geq t_0$, et est $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t \geq t_0$, on a $g'(t) = d(f_{|\mathcal{U}}^{-1})_{e^{-t} f(x)} (-e^{-t} f(x))$,

$$= - df_{g(t)}^{-1} (f \circ g(t))$$

et $g(t_0) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t_0} f(x)) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(f \circ \varphi^{t_0}(x)) = \varphi^{t_0}(x)$ car $\varphi^{t_0}(x) \in \mathcal{U}$.

On a alors, pour tout $t \geq t_0$, $\varphi^t(x) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t} f(x)) \in \mathcal{U}$.

<u>Autre preuve du lemme</u> : On a $\{t \geq t_0 \,/\, \varphi^t(x) \in \mathcal{U}\} = \varphi(x)^{-1}(\mathcal{U}) \cap [t_0, +\infty[$ ouvert de $[t_0, +\infty[$

$$\|$$

$\{t \geq t_0 \,/\, \varphi^t(x) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t} f(x))\}$ fermé de $[t_0, +\infty[$

On conclut la preuve du lemme par connexité de $[t_0, +\infty[$.

On revient à la preuve du théorème. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^{n_k}(x) \in \mathcal{U}$.

Pour tout $t \geq n_k$, $\varphi^t(x) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t} f(x))$, donc $\varphi^t(x) \longrightarrow f_{|\mathcal{U}}^{-1}(0) = y$.

- <u>Etape 3</u> : Soit $y \in S$. On va montrer que $B(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi^t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y\}$ est ouvert.

On a $B(y) = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} (\varphi^t)^{-1}(\mathcal{U})$. En effet, si $x \in B(y)$, on a $\varphi^t(x) \longrightarrow y$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi^t(x) \in \mathcal{U}$. Réciproquement, s'il existe t_0 tel que $\varphi^{t_0}(x) \in \mathcal{U}$, alors, d'après le lemme, on a $\varphi^t(x) \in \mathcal{U}$ pour tout $t \geqslant t_0$, et $\varphi^t(x) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t}f(x))$ donc $\varphi^t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$.

Finalement, l'étape 2 donne $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in S} B(y)$, et les $B(y)$ sont des ouverts (étape 3) disjoints. Par connexité de $\mathbb{R}^n$, on a $|S| = 1$. Par suite, f est bijective.

Par inversion globale, f est alors un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Compléments : cas où f est seulement $\mathcal{C}^1$.

Le cas où f est seulement $\mathcal{C}^1$ est plus difficile à traiter, car F n'est plus que continue, et on perd donc le caractère localement lipschitzien, ce qui empêche d'utiliser Cauchy-Lipschitz et la continuité du flot. On va donc montrer à la main que le flot est bien défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, et qu'il est continu.

① On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & dg_x^{-1}(-g(x)) \end{array}$, et on considère le problème (P) $\begin{cases} z' = F(z), \\ z(0) = z_0 \end{cases}$

où $z_0 \in \mathbb{R}^n$ est fixé. On va montrer que ce problème admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Unicité : Soient x_1 et x_2 deux solutions au problème ci-dessus, définies respectivement sur $[0, t_1[$ et $[0, t_2[$, avec $t_1 \leqslant t_2$. On va montrer que $x_1 = x_2$ sur $[0, t_1[$. Soit $t^* = \inf \{ t \in [0, t_1[, x_1(t) \neq x_2(t) \}$. On suppose que $t^* < t_1$.

Par continuité de x_1 et x_2, on a $x_1(t^*) = x_2(t^*)$. On pose $\varphi_1 = g \circ x_1$ et $\varphi_2 = g \circ x_2$, qui sont solutions de $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = g(z_0) \end{cases}$ sur $[0, t_1[$ et $[0, t_2[$ respectivement.

Par théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $[0, t_1[$. Par théorème d'inversion locale, on fixe un voisinage $\mathcal{U}$ de $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ tel que g induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $g(\mathcal{U})$. Par continuité de x_1 et x_2, on fixe $\delta > 0$ tel que $t^* - \delta > 0$, $t^* + \delta < t_1$ et, pour tout $t \in]t^* - \delta, t^* + \delta[$, on ait $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{U}$.

Pour tout $t \in]t^* - \delta, t^* + \delta[$, on a $\begin{cases} g \circ x_1(t) = g \circ x_2(t) \\ x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{U} \end{cases}$, donc $x_1(t) = x_2(t)$.

Ceci contredit la définition de t^*, car alors, $\inf \{ t \in [0, t_1[, x_1(t) \neq x_2(t) \} \geqslant t^* + \delta$.

• Existence : Soit $t^* = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+ \,/\, (P) \text{ admet une solution définie sur } [0,t[\}$.

Le théorème de Cauchy-Peano permet d'affirmer que t^* est bien défini.

On suppose par l'absurde que t^* est fini. Soit (t_k) une suite croissante d'éléments de $[0,t^*[$ convergeant vers t^* telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, (P) admette une solution x_k définie sur $[0,t_k[$. Par unicité (cf plus haut), x_{k+1} prolonge x_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Ceci permet de définir une solution x de (P) sur $[0,t^*[$.

On remarque alors que $g \circ x$ est solution du problème $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = g(z_0) \end{cases}$ sur $[0,t^*[$,

ce qui donne, pour tout $t \in [0,t^*[$, $g \circ x(t) = e^{-t} g(z_0)$, donc $x(t) \in g^{-1}(\overline{B}(0, \|g(z_0)\|))$.

Comme g est propre, $g^{-1}(\overline{B}(0,\|g(z_0)\|))$ est compact, ce qui permet de prolonger x en une solution de (P) définie sur $[0,t^*+\delta[$, avec $\delta > 0$, ce qui est absurde : (P) admet donc une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

② On pose $F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto dg_x^{-1}(-g(x)) \end{array}$ et $G : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y \longmapsto -y \end{array}$. On note

respectivement φ_F et φ_G les flots associés à ces champs de vecteurs. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Par théorème d'inversion locale, on fixe un voisinage U de x tel que g induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $g(U)$. On va montrer qu'il existe un voisinage W de x contenu dans U et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $y \in W$ et $t \in [0,\varepsilon[$, on ait $\varphi_G^t(g(y)) \in g(U)$. On commence par remarquer que $(z,t) \longmapsto \varphi_G^t(z)$ est continue, donc $\varphi_G^{-1}(g(U))$ est ouvert, et contient $(g(x),0)$, ce qui permet de fixer un voisinage V de $g(x)$ et $\varepsilon > 0$ tel que $V \times [0,\varepsilon[$ soit inclus dans $\varphi_G^{-1}(g(U))$.

On pose alors $W = g^{-1}(V) \cap U$. Pour tous $y \in W$ et $t \in [0, \varepsilon[$, on a $g(y) \in V$, donc $(g(y), t) \in V \times [0, \varepsilon[$, donc $(g(y), t) \in \varphi_G^{-1}(g(U))$, ce qui donne $\varphi_G^t(g(y)) \in g(U)$, et permet de considérer $g_{|U}^{-1} \circ \varphi_G^t \circ g(y)$ pour de tels y et t. Soit $y \in W$.

La fonction $\begin{array}{ccc} [0, \varepsilon[& \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & g_{|U}^{-1} \circ \varphi_G^t \circ g(y) \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\begin{array}{ccc} [0, \varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & F(g_{|U}^{-1} \circ \varphi_G^t \circ g(y)) \end{array}$

et vaut y en $t = 0$. La fonction $\begin{array}{ccc} [0, \varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \varphi_F^t(y) \end{array}$ est également $\mathcal{C}^1$, de

dérivée $\begin{array}{ccc} [0, \varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & F(\varphi_F^t(y)) \end{array}$, et vaut y en $t = 0$. Les deux fonctions considérées

ci-dessus sont donc solutions du problème $\begin{cases} z' = F(z) \\ z(0) = y \end{cases}$, et coïncident donc (sur $[0, \varepsilon[$).

Pour tout $t \in [0, \varepsilon[$, on a donc $g_{|U}^{-1} \circ \varphi_G^t \circ g(y) = \varphi_F^t(y)$. Ceci valant pour tous $y \in W$ et $t \in [0, \varepsilon[$, la fonction $\begin{array}{ccc} W \times [0, \varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (y, t) & \longmapsto & \varphi_F^t(y) \end{array}$ est continue

(et même $\mathcal{C}^1$), par composée de fonctions continues. Pour achever la preuve, on va utiliser la propriété de semi-groupe du flot.

On pose $t^* = \sup \{ t \geq 0 \,/\, \varphi_F^t \text{ est continue en } x \}$. Par ce qui précède, on a $t^* > 0$. On suppose par l'absurde que t^* est fini. On fixe une suite croissante (t_k) d'éléments de $[0, t^*[$ convergeant vers t^* telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_F^{t_k}$ soit continue en x. Soient à présent V' un voisinage de $\varphi_F^{t^*}(x)$ et $\eta > 0$ tels que la fonction $\begin{array}{ccc} V' \times [0, \eta[& \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (z, s) & \longmapsto & \varphi_F^s(z) \end{array}$ soit continue. On fixe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\delta := t^* - t_k \in \left]0, \frac{\eta}{2}\right[$ et $\varphi_F^{t_k}(x) \in \mathcal{V}'$. On pose $\mathcal{V}'' = (\varphi_F^{t_k})^{-1}(\mathcal{V}')$, qui est un voisinage de x par continuité de $\varphi_F^{t_k}$ en x.

Pour tout $z \in \mathcal{V}''$, on a $\varphi_F^{t^*+\delta}(z) = \varphi_F^{2\delta} \circ \varphi_F^{t_k}(z)$, donc $\varphi_F^{t^*+\delta}$ est continue en x, ce qui est absurde.

On a donc $t^* = +\infty$, ce qui achève la preuve.